Un Bocadito del Conteo y Probabilidad

Néstor F. Díaz Morera

COCITEI
Oaxaca, México

31 de agosto de 2020

Esquema

Supongamos que hay un conjunto de 100 mexicanos, Supongamos que hay un conjunto de 100 mexicanos, de las cuales 45 son aficionados del América, 40 del Monterrey y 37 del Toluca.

Supongamos que hay un conjunto de 100 mexicanos, de las cuales 45 son aficionados del América, 40 del Monterrey y 37 del Toluca. Resulta que 10 les gusta América y Monterrey, 11 América y Toluca, finalmente 9 Toluca y Monterrey.

- ¿Existe alguno que le guste los tres equipos al mismo tiempo?

Supongamos que hay un conjunto de 100 mexicanos, de las cuales 45 son aficionados del América, 40 del Monterrey y 37 del Toluca. Resulta que 10 les gusta América y Monterrey, 11 América y Toluca, finalmente 9 Toluca y Monterrey.

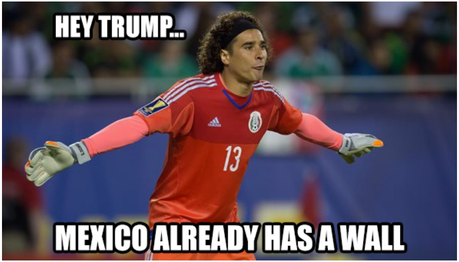
- ¿Existe alguno que le guste los tres equipos al mismo tiempo?
- ¿Cuántos son únicamente hinchas del América y Monterrey?

Supongamos que hay un conjunto de 100 mexicanos, de las cuales 45 son aficionados del América, 40 del Monterrey y 37 del Toluca. Resulta que 10 les gusta América y Monterrey, 11 América y Toluca, finalmente 9 Toluca y Monterrey.

- ¿Existe alguno que le guste los tres equipos al mismo tiempo?
- ¿Cuántos son únicamente hinchas del América y Monterrey?
- ¿Cuántos son realmente hinchas del Toluca?

Supongamos que hay un conjunto de 100 mexicanos, de las cuales 45 son aficionados del América, 40 del Monterrey y 37 del Toluca. Resulta que 10 les gusta América y Monterrey, 11 América y Toluca, finalmente 9 Toluca y Monterrey.

- ¿Existe alguno que le guste los tres equipos al mismo tiempo?
- ¿Cuántos son únicamente hinchas del América y Monterrey?
- ¿Cuántos son realmente hinchas del Toluca?



Hay un amigo que se llama...

Hay un amigo que se llama... diagramas de Venn que usaremos para ver el ¡Principio de Inclusión-Exclusión!.

Hay un amigo que se llama... diagramas de Venn que usaremos para ver el ¡Principio de Inclusión-Exclusión!. Llamemos $A :=$América, $M :=$Monterrey y $T :=$Toluca.

Hay un amigo que se llama... diagramas de Venn que usaremos para ver el ¡Principio de Inclusión-Exclusión!. Llamemos A :=América, M :=Monterrey y T :=Toluca. Observamos

$$\#A = 45, \quad \#M = 40, \quad \#T = 37,$$
$$\#A \cap M = 10, \quad \#A \cap T = 11 \quad \#T \cap M = 9$$

Hay un amigo que se llama... diagramas de Venn que usaremos para ver el ¡Principio de Inclusión-Exclusión!. Llamemos A :=América, M :=Monterrey y T :=Toluca. Observamos

$$\#A = 45, \quad \#M = 40, \quad \#T = 37,$$
$$\#A \cap M = 10, \quad \#A \cap T = 11 \quad \#T \cap M = 9$$

Queremos saber $\#A \cap T \cap M$ ☕.

Hay un amigo que se llama... diagramas de Venn que usaremos para ver el ¡Principio de Inclusión-Exclusión!. Llamemos A :=América, M :=Monterrey y T :=Toluca. Observamos

$$\#A = 45, \quad \#M = 40, \quad \#T = 37,$$
$$\#A \cap M = 10, \quad \#A \cap T = 11 \quad \#T \cap M = 9$$

Queremos saber $\#A \cap T \cap M$ ☕. Los símbolos $\cup$ y $\cap$ significan unión e intersección respectivamente

Hay un amigo que se llama... diagramas de Venn que usaremos para ver el ¡Principio de Inclusión-Exclusión!. Llamemos A :=América, M :=Monterrey y T :=Toluca. Observamos

$$\#A = 45, \quad \#M = 40, \quad \#T = 37,$$
$$\#A \cap M = 10, \quad \#A \cap T = 11 \quad \#T \cap M = 9$$

Queremos saber $\#A \cap T \cap M$ ☕. Los símbolos $\cup$ y $\cap$ significan unión e intersección respectivamente e.g.

$$A \cup M \cup T = \{\text{todos los mexicanos que les guste } A \text{ o } M \text{ o } T\}$$

mientras

$$A \cap M \cap T = \{\text{todos los mexicanos que les guste } A \text{ y } M \text{ y } T\ \}$$

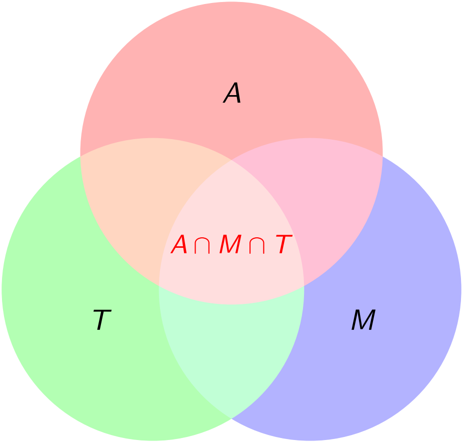


Figura: Diagrama de Venn

Del diagrama de Venn, podemos concluir lo siguiente

$$\#A \cup M \cup T = \#A + \#M + \#T - \#A \cap M - \#A \cap T - \#M \cap T \\ + \#A \cap M \cap T$$

Del diagrama de Venn, podemos concluir lo siguiente

$$\#A \cup M \cup T = \#A + \#M + \#T - \#A \cap M - \#A \cap T - \#M \cap T \\ + \#A \cap M \cap T$$

Sustituimos los valores dados:

$$100 = 45 + 40 + 37 - 10 - 11 - 9 + \#A \cap M \cap T$$

Por ende,

$$\boxed{\#A \cap M \cap T = 8}$$

Del diagrama de Venn, podemos concluir lo siguiente

$$\begin{aligned}\#A \cup M \cup T = \#A + \#M + \#T - \#A \cap M - \#A \cap T - \#M \cap T \\ + \#A \cap M \cap T\end{aligned}$$

Sustituimos los valores dados:

$$100 = 45 + 40 + 37 - 10 - 11 - 9 + \#A \cap M \cap T$$

Por ende,

$$\boxed{\#A \cap M \cap T = 8}$$

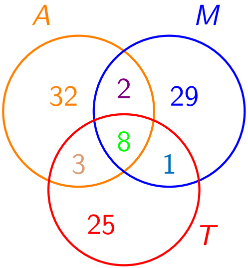
• Así, respondiendo a la primera pregunta: hay 8 mexicanos de los 100 que les gusta los tres equipos al mismo tiempo.

Sabiendo el centro, todo sale mágicamente:

$$\begin{cases} \#A \cap M = 10 - 8 \\ \#A \cap T = 11 - 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \#A - (2 + 3 + 8)$$

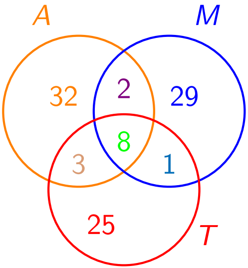
Sabiendo el centro, todo sale mágicamente:

$$\begin{cases} \#A \cap M = 10 - 8 \\ \#A \cap T = 11 - 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \#A - (2 + 3 + 8)$$



Sabiendo el centro, todo sale mágicamente:

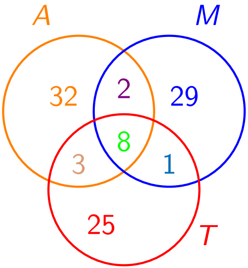
$$\begin{cases} \#A \cap M = 10 - 8 \\ \#A \cap T = 11 - 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \#A - (2 + 3 + 8)$$



- Tan sólo dos hinchas del América y el Monterrey simultáneamente.

Sabiendo el centro, todo sale mágicamente:

$$\begin{cases} \#A \cap M = 10 - 8 \\ \#A \cap T = 11 - 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \#A - (2 + 3 + 8)$$



- Tan sólo dos hinchas del América y el Monterrey simultáneamente.
- Hay 25 fervientes mexicanos únicamente apoyando a Toluca ☺

¿Qué son lo números naturales?

¿Qué son lo números naturales? Es un conjunto de símbolos denotados como

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

que parece que surgieron de la necesidad de saber cuantos elementos tengo en determinado conjunto.

¿Qué son lo números naturales? Es un conjunto de símbolos denotados como

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

que parece que surgieron de la necesidad de saber cuantos elementos tengo en determinado conjunto. e.g.

¿Cuántos países tienen el idioma Portugués como lengua oficial?

El conjunto son los países y deseo saber cuántos de ellos hablan portugués oficialmente:

¿Qué son lo números naturales? Es un conjunto de símbolos denotados como

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

que parece que surgieron de la necesidad de saber cuantos elementos tengo en determinado conjunto. e.g.

¿Cuántos países tienen el idioma Portugués como lengua oficial?

El conjunto son los países y deseo saber cuántos de ellos hablan portugués oficialmente:

{Brazil, Mozambique, Angola, Portugal, Guinea-Bissau, East Timor, Equatorial Guinea, Macau, Cape Verde, São Tomé and Príncipe}

Es decir, 10 países.

Supongamos que el tío Euclides es un borracho.

Supongamos que el tío Euclides es un borracho. ¿De cuántas maneras puede el tío beberse 4 mezcales de diferente marca y 3 tequilas de diferente marca de tal forma que estén alternados los licores?.

Llamemos

$$M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}, \qquad T = \{T_1, T_2, T_3\}$$

Supongamos que el tío Euclides es un borracho. ¿De cuántas maneras puede el tío beberse 4 mezcales de diferente marca y 3 tequilas de diferente marca de tal forma que estén alternados los licores?.
Llamemos

$$M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}, \qquad T = \{T_1, T_2, T_3\}$$

Así observamos:

M	T	M	T	M	T	M

Supongamos que el tío Euclides es un borracho. ¿De cuántas maneras puede el tío beberse 4 mezcales de diferente marca y 3 tequilas de diferente marca de tal forma que estén alternados los licores?.
Llamemos

$$M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}, \qquad T = \{T_1, T_2, T_3\}$$

Así observamos:

M	T	M	T	M	T	M

Por lo tanto,

$$4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = \underbrace{(4 \times 3 \times 2 \times 1)}_{4!} \times \underbrace{(3 \times 2 \times 1)}_{3!}.$$

Supongamos que el tío Euclides es un borracho. ¿De cuántas maneras puede el tío beberse 4 mezcales de diferente marca y 3 tequilas de diferente marca de tal forma que estén alternados los licores?.
Llamemos

$$M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}, \qquad T = \{T_1, T_2, T_3\}$$

Así observamos:

M	T	M	T	M	T	M

Por lo tanto,

$$4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = \underbrace{(4 \times 3 \times 2 \times 1)}_{4!} \times \underbrace{(3 \times 2 \times 1)}_{3!}.$$

Así llegamos a una nueva concepto: factorial para cualquier número natural n, su factorial es

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Seis amigos quieren jugar suficiente partidas de ajedrez para estar seguro que todos jueguen con todos.

Seis amigos quieren jugar suficiente partidas de ajedrez para estar seguro que todos jueguen con todos. ¿Cuántos juegos ellos tendrán que jugar para lograrlo?

En total hay 6 amigos, pero sólo pueden jugar 2 de ellos al mismo tiempo y el orden no me importa de como jueguen, por lo ende

$$\frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

Seis amigos quieren jugar suficiente partidas de ajedrez para estar seguro que todos jueguen con todos. ¿Cuántos juegos ellos tendrán que jugar para lograrlo?

En total hay 6 amigos, pero sólo pueden jugar 2 de ellos al mismo tiempo y el orden no me importa de como jueguen, por lo ende

$$\frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

Es decir, deben jugar 15 partidas de ajedrez.

Seis amigos quieren jugar suficiente partidas de ajedrez para estar seguro que todos jueguen con todos. ¿Cuántos juegos ellos tendrán que jugar para lograrlo?

En total hay 6 amigos, pero sólo pueden jugar 2 de ellos al mismo tiempo y el orden no me importa de como jueguen, por lo ende

$$\frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

Es decir, deben jugar 15 partidas de ajedrez. Así definimos combinaciones: Una combinación de k objetos de una colección de n objetos es caulquier arreglo no ordenado de k distintos objetos del total de objetos n:

$$\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Con combinaciones podemos calcular algunas probabilidades. A groso modo, una probabilidad debe cumplir

Con combinaciones podemos calcular algunas probabilidades. A groso modo, una probabilidad debe cumplir

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ para algún evento A del espacio de muestra S.

Con combinaciones podemos calcular algunas probabilidades. A groso modo, una probabilidad debe cumplir

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ para algún evento A del espacio de muestra S.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si los eventos A y B no tienes elementos en común.

Con combinaciones podemos calcular algunas probabilidades. A groso modo, una probabilidad debe cumplir

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ para algún evento A del espacio de muestra S.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si los eventos A y B no tienes elementos en común.

(e.g) Supongamos usted tiene una moneda justa y la lanza dos veces.

Con combinaciones podemos calcular algunas probabilidades. A groso modo, una probabilidad debe cumplir

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ para algún evento A del espacio de muestra S.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si los eventos A y B no tienes elementos en común.

(e.g) Supongamos usted tiene una moneda justa y la lanza dos veces.

- ¿Cuál es la probabilidad que al menos 1 cara salga?

Con combinaciones podemos calcular algunas probabilidades. A groso modo, una probabilidad debe cumplir

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ para algún evento A del espacio de muestra S.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si los eventos A y B no tienes elementos en común.

(e.g) Supongamos usted tiene una moneda justa y la lanza dos veces.

- ¿Cuál es la probabilidad que al menos 1 cara salga?
- ¿Cuál es la probabilidad que a lo sumo 2 caras ocurran?

Con combinaciones podemos calcular algunas probabilidades. A groso modo, una probabilidad debe cumplir

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ para algún evento A del espacio de muestra S.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si los eventos A y B no tienes elementos en común.

(e.g) Supongamos usted tiene una moneda justa y la lanza dos veces.

- ¿Cuál es la probabilidad que al menos 1 cara salga?
- ¿Cuál es la probabilidad que a lo sumo 2 caras ocurran?

Debemos identificar en lenguaje matemático:

$$S = \{HH, HT; TH, TT\} \Leftarrow \text{espacio de muestra}$$

Con combinaciones podemos calcular algunas probabilidades. A groso modo, una probabilidad debe cumplir

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ para algún evento A del espacio de muestra S.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si los eventos A y B no tienes elementos en común.

(e.g) Supongamos usted tiene una moneda justa y la lanza dos veces.

- ¿Cuál es la probabilidad que al menos 1 cara salga?
- ¿Cuál es la probabilidad que a lo sumo 2 caras ocurran?

Debemos identificar en lenguaje matemático:

$$S = \{HH, HT; TH, TT\} \Leftarrow \text{espacio de muestra}$$

Además, denotemos A el evento donde al menos hay una cara:

Con combinaciones podemos calcular algunas probabilidades. A groso modo, una probabilidad debe cumplir

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ para algún evento A del espacio de muestra S.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si los eventos A y B no tienes elementos en común.

(e.g) Supongamos usted tiene una moneda justa y la lanza dos veces.

- ¿Cuál es la probabilidad que al menos 1 cara salga?
- ¿Cuál es la probabilidad que a lo sumo 2 caras ocurran?

Debemos identificar en lenguaje matemático:

$$S = \{HH, HT; TH, TT\} \Leftarrow \text{espacio de muestra}$$

Además, denotemos A el evento donde al menos hay una cara:

$$A = \{HH, HT, TH\} \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Supongamos que usted lanza 20 veces la moneda y la probabilidad de que salga cara es 0.4.

- ¿Cuál es la probabilidad que al menos 9 caras salgan?
- ¿Cuál es la probabilidad que a lo más 12 caras ocurran?

Supongamos que usted lanza 20 veces la moneda y la probabilidad de que salga cara es 0.4.

- ¿Cuál es la probabilidad que al menos 9 caras salgan?
- ¿Cuál es la probabilidad que a lo más 12 caras ocurran?

¿Existe un camino corto para computar lo anterior?

Supongamos que usted lanza 20 veces la moneda y la probabilidad de que salga cara es 0.4.

- ¿Cuál es la probabilidad que al menos 9 caras salgan?
- ¿Cuál es la probabilidad que a lo más 12 caras ocurran?

¿Existe un camino corto para computar lo anterior?

Sí, se llama la ¡distribución binomial!.

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Supongamos que usted lanza 20 veces la moneda y la probabilidad de que salga cara es 0.4.

- ¿Cuál es la probabilidad que al menos 9 caras salgan?
- ¿Cuál es la probabilidad que a lo más 12 caras ocurran?

¿Existe un camino corto para computar lo anterior?

Sí, se llama la ¡distribución binomial!.

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}(X \geq 9) = 1 - \mathbb{P}(X < 9) = 1 - \sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}(X = x) = 1 - 0{,}5956 = {,}4044$$

¡Muchas Gracias!